На правах рукописи

ЛАДЕЙЩИКОВ Александр Николаевич

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИГРОВОГО УПРАВЛЕНИЯ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы

и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2013

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина» на кафедре вычислительной математики

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Красовский Андрей Николаевич
Официальные оппоненты:	Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, член корреспондент РАН, ФГБУН «Институт математики и механики имени Н.Н.Красовского», главный научный сотрудник отдела управляемых систем
	Шориков Андрей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина», профессор кафедры прикладной математики
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»

Защита состоится 18 декабря 2013 г. в 11:00 часов на заседании диссертационного совета Д.212.285.25 на базе ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» по адресу: 620000, г. Екатеринбург, проспект Ленина, 51, комн. 248

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Автореферат разослан 13 ноября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета:
доктор физико-математических наук, профессор В.Г.Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Задачи игрового управления, вызванные в свое время практическими задачами, обрели в последние годы форму строгой теории, развивающейся в рамках общей математической теории управления движением. В настоящее время эти задачи рассматриваются в теории дифференциальных игр. При этом усилия многих исследователей в этой области направлены не только на выяснение формальной структуры дифференциальной игры, как математически идеализированного предмета, но и на поиски таких подходов к решению задач, которые могли бы привести к результатам, отвечающим возможным запросам практики. Такому становлению и развитию дифференциальных игр способствовали работы Р.Айзекса, А.А.Азамова, А.Я.Азамова, М.И.Алексейчика, Э.Г.Альбрехта, В.Д.Батухтина, Т.Башара, Р.Беллмана, А.Бенсусана, В.Г.Болтянского, Н.Д.Боткина, А.Брайсона, Р.Ф.Габасова, Р.В.Гамкрелидзе, И.В.Гирсанова, Н.Л.Григоренко, М.И.Гусева, П.Б.Гусятникова, В.И.Жуковского, М.И.Зеликина, Н.Калтона, Ф.М.Кирилловой, В.Б.Колмановского, А.Ф.Кононенко, А.Н.Красовского, Н.Н.Красовского, М.Г.Крендалла, А.В.Кряжимского, А.Б.Куржанского, С.Н. Кружкова, В.Н.Лагунова, Ю.С.Ледяева, Дж.Лейтмана, П.Л.Лионса, Н.Ю.Лукоянова, А.А.Меликяна, А.В.Мезенцева, Е.Ф.Мищенко, М.С.Никольского, Г.Олсдера, Ю.С.Осипова, В.В.Остапенко, В.С.Пацко, А.Г.Пашкова, Н.Н.Петрова, Л.А.Петросяна, Г.К.Пожарицкого, В.С.Половинкина, Л.С.Понтрягина, Б.Н.Пшеничного, Э.Роксина, Н.Ю.Сатимова, Э.Р.Смольякова, А.И.Субботина, Н.Н.Субботиной, Е.Л.Тонкова, В.Е.Третьякова, В.И.Ухоботова, В.Н.Ушакова, Р.П.Федоренко, А.Ф.Филиппова, В.Флеминга, А.Фридмана, Ю.Хо, А.Г.Ченцова, Ф.Л.Черноусько, А.А.Чикрия, С.В.Чистякова, А.Ф.Шорикова, Р.Эллиота и других авторов.

Математическая модель дифференциальной игры складывается, как известно, из уравнения движения объекта, ограничений, накладываемых на управления игроков и, возможно, на фазовые координаты, а также из цели игры, характеризуемой обычно некоторым критерием качества процесса управления γ и вида информации (информационного образа) используемого при построении оптимального алгоритма (стратегии) управления. Он задается функционалом от движений объекта - решений соответствующих дифференциальных уравнений, а также от реализаций управляющего воздействия и помехи. При этом вид целевого функционала определяет подчас степень трудности решения игры и характер той информации, на которую целесообразно опираться игрокам при построении стратегий ведения игры.

В связи с этим в теории дифференциальных игр остается еще ряд невыясненных вопросов принципиального характера о существовании оптимальных решений в той или иной форме синтеза управляемой системы по принципу обратной связи. Известны трудности, связанные с непосредственной формализацией дифференциальных игр на основе отождествления стратегий с такими управлениями - функциями от текущих позиций, которые удовлетворяли бы стандартным теоремам о существовании решений соответствующих дифференциальных уравнений. Эти трудности вызвали к жизни обобщенные формализации дифференциальных игр, которые рассматривались в работах Р.Айзекса, В.Д.Батухтина, Н.Калтона, Н.Н.Красовского, Н.Ю.Лукоянова, А.А.Меликяна, А.И.Субботина, Н.Н.Петрова, Л.А.Петросяна, В.Е.Третьякова, В.Флеминга, А.Фридмана, Ф.Л.Черноусько, Р.Эллиота. Были развиты формальные процедуры, доставляющие некоторые величины ρ^0, которые можно было бы назвать по определению ценой игры. Большинство таких конструкций базируется на предельном переходе по величине γ от подходящих многошаговых процедур или от подходящих стохастических игр для систем с исчезающим шумом. В работах Н.Калтона, А.В.Кряжимского, А.И.Субботина, А.Г.Ченцова, Р.Эллиота развиты конструкции, где стратегии (квазистратегии) формализуются как операторы, которые определяют отклик в текущий момент t одного из игроков на историю действий его противника вплоть до этого момента времени t. В работах Н.Н.Красовского, Э.Роксина предложены аксиоматические определения стратегий, движений и соответствующих игровых задач управления. В работах Н.Ю.Лукоянова, М.С.Никольского, Ю.С.Осипова, Ф.Л.Черноусько, В.С. Шишмакова рассматривались задачи игрового управления, в которых один из игроков получает информацию о положении системы с постоянным запаздыванием. В работах В.Г.Болтянского, Р.В.Гамкрелидзе, А.Н.Красовского, Н.Н.Красовского, А.Б.Куржанского, Е.Ф.Мищенко, Ю.С.Осипова, Л.С.Понтрягина, Б.Н.Пшеничного, Ф.Л.Черноусько разработана стройная формальная модель игрового управления, делающая акцент на одну из двух противоположных задач, из которых можно составить дифференциальную игру. Эта модель позволила выяснить принципиальные вопросы строения дифференциальных игр. В то же время на основе этой модели оказалось возможным разработать методы построения разрешающих управлений для важных игровых задач сближения и уклонения.

Среди существенных задач позиционной теории дифференциальных игр можно назвать выяснение условий, при которых возможно формирование управляющих воздействий на основе информации только о *достаточном информационном образе* и притом о возможности формирования управлений на основе этой информации так, чтобы одна и та же такая *универсальная стратегия* работала как оптимальная, начиная с любой возможной позиции. Этот вопрос и составляет предмет исследования в данной работе.

Цели диссертационной работы. Решение рассматриваемых задач игрового управления в классе чистых стратегий с различными информационными образами и построение оптимальных алгоритмов управления. Проверка работоспособности разработанных алгоритмов управления при решении модельного примера с применением численных методов и составления комплекса (пакета) программ для ЭВМ.

Методы исследования. Основным методом исследования является метод *экстремального сдвига на сопутствующие точки*[1]. Предложенные численные алгоритмы реализованы автором в виде программы на языке Pascal[2].

Научная новизна. В первой главе для рассматриваемой задачи конфликтного управления линейной динамической системой для комбинированного критерия качества при неполной информации о действующих динамических помехах и неточной запаздывающей информации о значениях фазового вектора системы установлено существование оптимального решения в классе чистых стратегий.

Во второй главе предложен эффективный метод решения рассматриваемой задачи конфликтного управления при дефиците информации о действующих помехах для специфического критерия качества.

Задача формализуется в антагонистическую дифференциальную игру в рамках свердловской (ныне екатеринбургской) школы Н.Н.Красовского. Предложен оригинальный и конструктивный метод доказательства теоремы существования оптимальных решений – цены игры и седловой точки в классе чистых позиционных стратегий.

---

[1]Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control Under Lack of Information.* Boston: Birkhauser, 1994.

[2] Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. Программа для реализации алгоритма оптимального позиционного управления и вычисления цены антагонистической дифференциальной игры // а. с. 2013618708 РФ 17.09.2013; заявитель и правообладатель ФГАОУ ВПО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина». – № 2013616912; заявл. 01.08.2013.

В третьей главе разработан специальный комплекс (пакет) программ для ЭВМ для решения конкретных задач в игровой постановке такого типа с использованием численных методов [3].

Теоретическая и практическая ценность. Предложенные методы имеют как теоретическую, так и практическую ценность в области решения актуальных задач управления при дефиците информации не только о динамических помехах, действующих на управляемую систему, но и при неточной и запаздывающей информации о состояниях объекта в текущие моменты времени в схеме управления по принципу обратной связи. Рассмотренные в работе критерии качества процесса управления моделируют многие оценки процессов управления, встречающиеся на практике, в технике, медицине, экономике и т.д.

Основные результаты диссертации.

Для задачи оптимального управления конфликтно управляемой линейной динамической системы для комбинированного критерия качества при неполной запаздывающей информации установлено существование оптимального решения.

Для нелинейной дифференциальной игры для специфического критерия качества в классе чистых позиционных стратегий предложен эффективный метод решения. Установлено существование седловой точки и цены игры. Предложено оригинальное доказательство теоремы существования решения донной дифференциальной игры с последовательным рассмотрением двух вспомогательных дифференциальных игр.

Разработан комплекс (пакет) программ для решения нелинейных дифференциальных игр.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на конференциях: 14-ой, 15-ой отчетной научно-практической конференции молодых ученых УГТУ – УПИ (Екатеринбург - 2008, 2009), 4-ой научно-практической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов "Информационно-математические технологии и экономическое моделирование" (Екатеринбург - 2010), 19-ой Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012» (Москва - 2012), 5-ой Всероссийской научно-технической конференции «Безопасность критичных инфраструктур и территорий», 20-ой Международной научной конференции студентов, аспирантови молодых учёных «Ломоносов-2013» (Москва - 2013), на научных семинарах кафедры вычислительной математики ФГАОУ ВПО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина» и отдела управляемых систем ФГБУН «Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского».

Публикации. Материал диссертации опубликован в 2 статьях в рецензируемых научных журналах, определенных ВАК [1-2], в монографии [6], в тезисах докладов. На разработанный комплекс программ имеется свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ [3]. Список основных публикаций автора приведен в конце автореферата.

В указанных работах, выполненных совместно с А.Н.Красовским, последнему принадлежат постановки и методы решения задач, а автору диссертации разработка оптимальных алгоритмов управления, доказательства теорем существования решений для рассматриваемых классов задач игрового управления, разработка программ для реализации алгоритмов и доведение их до численных экспериментов на ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав основного содержания и списка литература. Общий объем диссертации составляет 125 страниц, включая 8 рисунков. Список цитируемой литературы включает 83 наименования.

Содержание работы.

Во введении раскрываются цели и задачи работы, ее актуальность, а также кратко описываются основные результаты, полученные в диссертации.

В первой главе для конфликтно управляемой динамической системы для критерия качества комбинированного типа рассматривается задача об оптимальном управлении по принципу обратной связи, при неполной информации о динамической помехе и при запаздывающей неточной информации о значениях фазовой переменной, характеризующей текущее состояние системы. При решении задачи используется метод программного стохастического синтеза и метод экстремального сдвига на сопутствующие точки. Конструируется оптимальная стратегия управления и устанавливается существование решения рассматриваемой задачи.

Рассматривается объект, движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = \mathrm{A}(t)\,x + \mathrm{B}(t)\,u + C(t)\,\upsilon, \quad t_0 \le t \le \vartheta,$$

$$u \in P, \ \upsilon \in Q. \tag{1}$$

Здесь x - n -мерный фазовый вектор, t время, t_0 и ϑ зафиксированы, $\mathrm{A}(t), \mathrm{B}(t), C(t)$ - кусочно-непрерывные матрицы - функции, u - r -мерный и υ - s -мерный векторы (u - управление, υ - помеха). Все векторы трактуются как векторы-столбцы. В (1) $P \subset R^r$ и $Q \subset R^s$ – ограниченные замкнутые множества векторов, т.е. – к*омпакты*.

Показатель качества γ для процесса $\{ x[t_0[\cdot]\vartheta]; \ u[t_0[\cdot]\vartheta); \ \upsilon[t_0[\cdot]\vartheta) \} = \{ x[t], \ t_0 \le t \le \vartheta; \ u[t], \ t_0 \le t < \vartheta; \ \upsilon[t], \ t_0 \le t < \vartheta \}$ имеет вид

$$\gamma(x[t_0[\cdot]\vartheta];\ u[t_0[\cdot]\vartheta);\ \upsilon[t_0[\cdot]\vartheta)) = \left| x[\vartheta] - \tilde{x} \right| + \\ + \int_{t_0}^{\vartheta} \varphi(t) \left| u[t] \right|^2 dt - \int_{t_0}^{\vartheta} \psi(t) \left| \upsilon[t] \right|^2 dt. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{x}$ – некоторый фиксированный n-мерный вектор, символ $|f|$ обозначает евклидову норму вектора f; $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ суть заданные кусочно-непрерывные функции, $\varphi(t) \geq \alpha,\ \psi(t) \geq \beta,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$.

Рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи на минимакс заданного критерия γ (2) при дефиците информации о действующих динамических помехах. Кроме того, информация о состояниях $x[t]$ идет с запаздыванием и еще с искажением. Текущая информация о фазовых состояниях $x[t]$ объекта (1) при $t \geq t_0 + h$, где $h > 0$ величина запаздывания, используется в виде n-мерного вектора $x^*[t]$

$$x^*[t] = x[t-h] + \Delta x^*[t],\ t \geq t_0 + h. \tag{3}$$

Начальное фазовое состояние $x[t_0] = x_0$ объекта также сообщается с искажением. Обозначим

$$x_0^* = x_0 + \Delta x_0^*. \tag{4}$$

В таком случае в качестве достаточного информационного образа $Y[t]$, на основании которого целесообразно формировать оптимальную стратегию управления $u^0(t, Y, \varepsilon)$ выбирается совокупность компонент определяемых параметрами системы (1), критерия качества γ (2) и величинами (3),(4). В рассматриваемой задаче величина оптимального гарантированного результата для состояния $\{t_*, \mathrm{Y}[t_*]\}$ называется величина

$$\rho_u^0(t_*, \Upsilon[t_*]) = \inf_{u(\cdot)} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \lim_{\delta\to 0} \sup_{\Delta_\delta} \rho(U_\delta = \{u(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}, t_*, \Upsilon[t_*]), \qquad (5)$$

Для построения величины (5) используется метод *стохастического программного синтеза*[3]. Устанавливается, что величина оптимального гарантированного результата (5) удовлетворяет условию u -*стабильности*[4]. Стратегия $u^0(t, Y, \varepsilon)$ называется *оптимальной универсальной*, если она гарантирует результат (5) и для любой возможной позиции работает по одному и тому же алгоритму. Для построения оптимальной стратегии $u^0(t, Y, \varepsilon)$ используется метод *экстремального сдвига* на сопутствующие элементы, который в данной работе трансформируется к следующему виду.

В момент времени $t_i \in \Delta_\delta$ в некоторой окрестности $K_\varepsilon[t_i]$ информационного состояния $Y[t_i]$ находится сопутствующая точка $Z^0[t_i]$ удовлетворяющая условию

$$\rho_u^0(t_i, Z^0[t_i]) = \min_{Z\in K_\varepsilon[t_i]} \rho_u^0(t_i, Z) \qquad (6)$$

После этого выбором вектора управления $u^0[t_i] = u^0(t_i, Y[t_i], \varepsilon) \in P$ осуществляется экстремальный сдвиг состояния $Y[t_i]$ к сопутствующему состоянию $Z^0[t_i]$.

Устанавливается, что построенная таким методом стратегия $u^0(t, Y, \varepsilon)$ является *оптимальной универсальной* стратегией.

Основным результатом первой главы является следующая теорема:

---

[3] Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. *Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры* // Докл. АН СССР. 1981. 259. №1.

[4] Красовский Н.Н. *Управление динамической системой*. Москва: Наука 1985.

Теорема 1.2 *Построенная чистая стратегия управление* $u^0(\cdot) = u^0(t, Y, \varepsilon)$ *является оптимальной универсальной стратегией для рассматриваемой задачи конфликтного управления для динамической системы (1) с критерием качества процесса управления* γ *(2). При этом стратегия* $u^0(\cdot) = u^0(t, Y, \varepsilon)$ *строится как экстремальная к функции оптимального гарантированного результата* $\rho_u^0(t, Y)$.

Подчеркнем,что в отличие от известных задач конфликтного управления, решаемых либо при дефиците информации только о действующих помехах, либо запаздывающей информации, либо искаженной информации о фазовых состояниях объекта здесь, все эти три величины (*помехи*) рассматриваются в совокупности.

Результаты первой главы опубликованы в работе [1].

Во второй главе рассматривается задача об оптимальном управлении по принципу обратной связи нелинейной динамической системой при дефиците информации о действующих помехах. Рассматривается случай, когда правая часть дифференциального уравнения движения системы удовлетворяет так называемому *условию седловой точки для маленькой игры*. Задача на минимакс-максимин гарантированного результата для заданного специфического критерия качества формализуется в антагонистическую дифференциальную игру двух лиц в рамках концепции свердловской (ныне екатеринбургской) школы по теории дифференциальных игр. Задача решается в классе *чистых позиционных стратегий*. Устанавливается существование цены $\rho^0(t,x)$ и позиционной седловой точки $\{u^0(\cdot)=u^0(t,x,\varepsilon),\ \upsilon^0(\cdot)=\upsilon^0(t,x,\varepsilon)\}$ рассматриваемой антагонистической дифференциальной игры. Решение задачи базируется на *методе экстремального сдвига на сопутствующие точки*. Оптимальные стратегии $u^0(\cdot) = u^0(t,x,\varepsilon)$ и $\upsilon^0(\cdot) = \upsilon^0(t,x,\varepsilon)$ строятся как *экстремальные* к функции цены игры $\rho^0(t,x)$. При этом цена игры для любой возможной позиции $\{t, x\}$ строится известным методом *верхних выпуклых оболочек*[1], вытекающим из метода *стохастического программного синтеза*[3]. Существенную роль при решении поставленной задачи играют некоторые виртуальные (компьютерные) модели, играющие роль поводыря (лидера) для реального конфликтно-управляемого x - объекта.

Рассматривается объект, описываемый векторным нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f\,(t, x, u, \upsilon), \quad t_0 \le t \le \vartheta, \quad u \in P, \quad \upsilon \in Q, \tag{7}$$

где x - n-мерный вектор, t - время, начальный и конечный моменты времени t_0 и ϑ зафиксированы, u - s-мерный вектор управления, υ - r-мерный вектор помехи, P и Q - компакты.

Функцию f полагаем непрерывной по t, x, u, υ и в каждой ограниченной области G пространства $\{x\}$ удовлетворяющей условию Липшица по x с константой L_G, т.е.

$$\begin{gathered} \left| f\,(t, x^{(1)}, u, \upsilon) - f\,(t, x^{(2)}, u, \upsilon)\right| \le \\ \le L_G \left| x^{(2)} - x^{(1)} \right|, \end{gathered} \tag{8}$$

---

[1]Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control Under Lack of Information.* Boston: Birkhauser, 1994.

[3] Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. *Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры* // Докл. АН СССР. 1981. 259. №1.

где $x^{(i)} \in G, \quad i = 1, 2$.

Рассматривается задача об управлениях u и υ, которые соответственно минимизируют и максимизируют критерий качества процесса управления, заданный в виде *функционала* γ от *движения* $x[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t], \quad t_* \le t \le \vartheta\}$ объекта (7), реализации *управления* $u[t_*[\cdot]\vartheta) = \{u[t] \in P, \quad t_* \le t < \vartheta\}$ и реализации *помехи* $\upsilon[t_*[\cdot]\vartheta) = \{\upsilon[t] \in Q, \quad t_* \le t < \vartheta\}$ следующего вида

$$\gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta], u[t_*[\cdot]\vartheta), \upsilon[t_*[\cdot]\vartheta)) =$$

$$= \int_{t_*}^{\vartheta} \omega(t, x[t], u[t], \upsilon[t])\, dt + \varphi(x[\vartheta]). \tag{9}$$

Здесь функция ω непрерывна по t, x, u, υ и удовлетворяет условию (8) при замене символа f на ω, а функция φ непрерывна по x.

Предполагается, что выполняется условие *седловой точки для маленькой игры*, то есть

$$\min_{u \in P} \max_{\upsilon \in Q} \{\langle l \cdot f(t, x, u, \upsilon) \rangle + y \cdot \omega(t, x, u, \upsilon)\} =$$

$$= \max_{\upsilon \in Q} \min_{u \in P} \{\langle l \cdot f(t, x, u, \upsilon) \rangle + y \cdot \omega(t, x, u, \upsilon)\}, \tag{10}$$

где l - любой n-мерный вектор, y - любой скаляр, символ $\langle l \cdot f(t, x, u, \upsilon) \rangle$ - обозначает скалярное произведение в пространстве R^n.

Для дифференциальной игры для x - объекта (7) с функционалом γ (9) рассматривается вспомогательная дифференциальная игра-2 для расширенной $\tilde{x} = \{ x , x_{n+1} \}$ - системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, \upsilon),$$
$$\dot{x}_{n+1} = \omega(t, x, u, \upsilon), \ u \in P, \ \upsilon \in Q, \ t_0 \le t \le \vartheta \tag{11}$$

с критерием качества процесса управления $\tilde{\gamma}$, задаваемого *функционалом*

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tilde{x}[t_*[\cdot]\vartheta]) = \varphi(x[\vartheta]) + x_{n+1}[\vartheta], \tag{12}$$

где $\tilde{x}[t_*[\cdot]\vartheta] = \{ \tilde{x}[t] = \{ x[t], \ x_{n+1}[t]\}, \quad t_* \le t \le \vartheta \}$.

Функционал (12) является *позиционным*[5]. А именно, *позиционным функционалом (критерием качества)* называется функционал от движения $\tilde{x}[t_*[\cdot]\vartheta] = \{ \tilde{x}[t] = \{ x[t], \ x_{n+1}[t]\}, \ t_* \le t \le \vartheta \}$ $\tilde{x}$ -объекта, который можно представить в виде

$$\tilde{\gamma}(\tilde{x}[t_*[\cdot]\vartheta]) = \phi(\tilde{x}[t_*[\cdot]t^*], \ \alpha), \tag{13}$$

где

$$\alpha = \tilde{\gamma}(\tilde{x}[t^*[\cdot]\vartheta]), \tag{14}$$

[5] Красовский А.Н. *О позиционном минимаксном управлении* // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44. Вып. 4.

и функция $\phi(\tilde{x}[t_*[\cdot]t^*],\ \alpha)$, при фиксированном отрезке движения $\tilde{x}[t_*[\cdot]t^*]$ непрерывна и не убывает по α .

В случае функционала $\tilde{\gamma}(\tilde{x}[t_*[\cdot]\vartheta])$ (13) имеем

$$\phi(\tilde{x}[t_*[\cdot]t^*],\ \alpha) = \alpha = \tilde{\gamma}(\tilde{x}[t^*[\cdot]\vartheta]) = \varphi(x[\vartheta]) + x_{n+1}[\vartheta]. \qquad (15)$$

С использованием метода *экстремального сдвига на сопутствующие точки* $\{t_i, \tilde{w}^0[t_i]\}$ доказывается следующее утверждение:

Лемма 2.1. *Дифференциальная игра-2 для* $\tilde{x}$ *-системы (11) с позиционным функционалом* $\tilde{\gamma}$ *(12) имеет цену* $\rho_2^0(t,\tilde{x}) = \rho_{2u}^0(t,\tilde{x}) = \rho_{2\upsilon}^0(t,\tilde{x})$ *и седловую точку* $\{\tilde{u}^0(\cdot) = \tilde{u}^0(t,\tilde{x},\varepsilon),\ \tilde{\upsilon}^0(\cdot) = \tilde{\upsilon}^0(t,\tilde{x},\varepsilon)\}$.

При доказательстве **Леммы 2.1** также используется метод[6,7], обеспечивающий отслеживание реального $\tilde{x}$ -объекта (11) и его виртуальной (компьютерной) $\tilde{w}$ -модели:

$$\begin{gathered} \dot{w} = f(t, w, u_*, \upsilon_*), \\ \dot{w}_{n+1} = \omega(t, w, u_*, \upsilon_*), \quad u_* \in P, \quad \upsilon_* \in Q \end{gathered} \qquad (16)$$

В рассматриваемом случае этот метод трансформируется в следующие утверждения:

---

[6]Krasovskii A.N., Choi Y.S Stochastic *Control with the Leaders-Stabilizers.* IMM Ural Branch of RAS.Ekaterinburg.Russia. 2001.

[7] КрасовскийА.Н., ЛадейщиковА.Н. *Некоторыезадачиигровогоуправления.*Екатеринбург: УрГСХА, 2012.

Лемма 2.2. *Пусть заданы позиция* $\{t_*, \tilde{x}_*\}$ *для* $\tilde{x}$ *-объекта (11), позиция* $\{t_*, \tilde{w}_*\}$ *для* $\tilde{w}$ *-модели (12) и число* $\varepsilon > 0$. *Тогда можно указать число* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что если векторы* u^0 *и* υ_*^0 *определены из условий*

$$\max_{\upsilon \in Q} \{ \left\langle s_* \ f(t_*, x_*, u^0, \upsilon) \right\rangle + y_* \, \omega(t_*, x_*, u^0, \upsilon) \} =$$

$$= \min_{u \in P} \max_{\upsilon \in Q} \{ \left\langle s_* \ f(t_*, x_*, u, \upsilon) \right\rangle + y_* \, \omega(t_*, x_*, u, \upsilon) \},$$

$$\min_{u_* \in P} \{ \left\langle s_* \ f(t_*, w_*, u_*, \upsilon_*^0) \right\rangle + y_* \, \omega(t_*, w_*, u_*, \upsilon_*^0) \} = \tag{17}$$

$$= \max_{\upsilon_* \in Q} \min_{u_* \in P} \{ \left\langle s_* \ f(t_*, w_*, u_*, \upsilon_*) \right\rangle + y_* \, \omega(t_*, w_*, u_*, \upsilon_*) \},$$

где $s_* = x_* - w_*, \quad y_* = x_{(n+1)*} - w_{(n+1)*}$, *то при* $t_* \le t < t_* + \delta(\varepsilon)$

действие $u^0[t_*[\cdot]t) = \{u^0[t] = u^0, \quad t_* \le t < t_* + \delta(\varepsilon)\}$ *в паре с любым действием* $\upsilon[t_*[\cdot]t)$, *и действие* $\upsilon_*^0[t_*[\cdot]t) = \{\upsilon_*^0[t] = \upsilon_*^0,$ $t_* \le t < t_* + \delta(\varepsilon)\}$ *в паре с любым действием* $u_*[t_*[\cdot]t]$ *породят из позиций* $\{t_*, \tilde{x}_*\}$ *и* $\{t_*, \tilde{w}_*\}$ *движения* $\tilde{x}[t_*[\cdot]t^*] = \{\tilde{x}[t], \quad t_* \le t \le t^*\}$ *и* $\tilde{w}[t_*[\cdot]t^*] = \{\tilde{w}[t], \quad t_* \le t \le t^*\}$, *для которых:*

$$\lambda(t, \tilde{x}[t], \tilde{w}[t]) = \lambda(t_*, \tilde{x}_*, \tilde{w}_*) + \varepsilon(t - t_*) \tag{18}$$

Здесь $\lambda(t, \tilde{x}, \tilde{w})$ функция вида:

$$\lambda(t, \tilde{x}, \tilde{w}) = \left| \tilde{x} - \tilde{w} \right|^2 \exp\{-2\tilde{L}_G (t - t_0)\}, \qquad (19)$$

где $\tilde{L}_G = 2L_G$, где L_G - постоянная Липшица из (8).

Лемма 2.3. *Формулируется аналогично* ***лемме 2.2*** *при взаимной замене символов* u *и* υ, P *и* Q.

Наряду с позиционной дифференциальной игрой-2 относительно расширенной $\{t, \tilde{x} = \{x, x_{n+1}\}\}$ рассматривается некоторая дифференциальная игра-3, отличающаяся от игры-2 лишь тем, что стратегии в этой игре-3 определяются как функции $u(t, x, \varepsilon)$ и $\upsilon(t, x, \varepsilon)$, то есть как чистые позиционные стратегии для исходной дифференциальной игры для x - объекта (7) с функционалом γ (9).

Доказывается следующая

Лемма 2.4. *Рассматриваемая дифференциальная игра-3 имеет цену* $\rho_3^0(t, \tilde{x}) = \rho_2^0(t, \tilde{x})$ *и седловую точку* $\{u^0(\cdot) = u^0(t, x, \varepsilon),$ $\upsilon^0(\cdot) = \upsilon^0(t, x, \varepsilon)\}$, *складывающуюся из экстремальных стратегий* $\tilde{u}^e(\cdot) = \tilde{u}^e(t, \tilde{x} = \{x, x_{n+1} = 0\}, \varepsilon)$ *и* $\tilde{\upsilon}^e(\cdot) = \tilde{\upsilon}^e(t, \tilde{x} = \{x, x_{n+1} = 0\}, \varepsilon)$.

Устанавливается, что в выражении функции цены игры $\rho_2^0(t, \tilde{x})$ координата x_{n+1} входит аддитивно, поэтому принимая $x_{n+1} = 0$ построение седловой точки $\{u^0(\cdot) = u^0(t, x, \varepsilon),\ \upsilon^0(\cdot) = \upsilon^0(t, x, \varepsilon)\}$ методом *экстремального сдвига* остается прежним.

Основным результатом второй главы является приведенное выше оригинальное и конструктивное доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.3. *Рассматриваемая дифференциальная игра для системы (7) с функционалом (9) имеет цену* $\rho^0(t, x) = = \rho_2^0(t, \tilde{x} = \{x, x_{(n+1)} = 0\})$ *и седловую точку* $\{u^0(\cdot), \upsilon^0(\cdot)\}$ *, складывающуюся из экстремальных универсальных стратегий* $\tilde{u}^e(\cdot) = \tilde{u}^e(t, \tilde{x} = \{x, x_{n+1} = 0\}, \varepsilon)$ *и* $\tilde{\upsilon}^e(\cdot) = \tilde{\upsilon}^e(t, \tilde{x} = \{x, x_{n+1} = 0\}, \varepsilon)$.

Результаты второй главы опубликованы в работе [2].

В третьей главе теоретические результаты иллюстрируются на решении модельного примера. Рассматривается движение материальной точки с единичной массой в горизонтальной плоскости $\{q_1, q_2\}$ под действием управляющей силы $u = \{u_1, u_2\}$ и силы помехи $\upsilon = \{\upsilon_1, \upsilon_2\}$ на фиксированном отрезке $[t_0, \vartheta]$ времени процесса управления. Уравнение движения объекта в форме второго закона Ньютона имеет вид

$$\ddot{q} = u + \upsilon, \quad t_0 \le t \le \vartheta, \tag{20}$$

где q - двумерный вектор, u и υ - векторные управляющие воздействия, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} |u| &= (u_1^2 + u_2^2)^{1/2} \le \mu, \\ |\upsilon| &= (\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2)^{1/2} \le \eta, \end{aligned} \tag{21}$$

где μ и η заданные числа.

Рассматривается задача об управлениях u и υ , которые соответственно минимизируют и максимизируют величину

$$\gamma = \int_{t_*}^{\vartheta} \langle u \cdot \upsilon \rangle dt + |\, q[\vartheta]\,|, \tag{22}$$

где $\langle u \cdot \upsilon \rangle = u_1\upsilon_1 + u_2\upsilon_2$, $|\, q[\vartheta]\,| = (q_1^2[\vartheta] + q_2^2[\vartheta])^{1/2}$,

$t_0 \le t_* < \vartheta$.

Рассматриваемая задача формализуется в антагонистическую дифференциальную игру двух лиц для x - объекта:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= u_1 + \upsilon_1, \\ \dot{x}_4 &= u_2 + \upsilon_2. \end{aligned} \tag{23}$$

где $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$ с функционалом γ :

$$\gamma = \int_{t_*}^{\vartheta} \langle u \cdot \upsilon \rangle dt + (x_1^2[\vartheta] + x_2^2[\vartheta])^{1/2}. \tag{24}$$

Для рассмотренного $\tilde{x} = \{x, x_{n+1}\}$ -объекта добавляем нелинейную компоненту

$$\dot{x}_5 = \langle u + \upsilon \rangle = u_1\upsilon_1 + u_2\upsilon_2. \tag{25}$$

В таком случае функционал $\tilde{\gamma}$ (12) принимает вид

$$\tilde{\gamma} = x_5[\vartheta] + (x_1^2[\vartheta] + x_2^2[\vartheta])^{1/2}. \tag{26}$$

В соответствии с результатами из второй главы, рассматриваемая дифференциальная игра для системы (23) с критерием качества γ (24) имеет седловую точку $\{u^0(\cdot) = u^0(t, x, \varepsilon),\ \upsilon^0(\cdot) = \upsilon^0(t, x, \varepsilon)\}$ и цену $\rho^0(t, x)$. Стратегии, составляющие седловую точку, строятся конструктивно по известной цене игры методом *экстремального сдвига*.

Приводятся результаты численной симуляции решения рассматриваемого примера на ЭВМ при различных способах выбора управлений и помех. Приводится алгоритм решения примера и подробное описание программы, реализующей этот алгоритм.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [2]. На разработанный комплекс (пакет) программ для ЭВМ для реализации алгоритма оптимального позиционного управления и вычисления цены антагонистической дифференциальной игры получено авторское свидетельство [3].

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых журналах, определенных ВАК.

1. Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. *Об одной задаче конфликтного управления при неполной запаздывающей информации* // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. вып. 2. С.18-36.
2. Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. *Задача игрового управления при дефиците информации* // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4. вып. 2. С.57-70.
3. Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. Программа для реализации алгоритма оптимального позиционного управления и вычисления цены антагонистической дифференциальной игры // а.с. 2013618708РФ17.09.2013; заявитель и правообладатель ФГАОУ ВПО «УрФУ имени первого Президента России Б.Н.Ельцина». – № 2013616912; заявл. 01.08.2013.

Другие публикации:

4. Ким А.В., Красовский А.Н., Глушенкова В.В., Ладейщиков А.Н. *Управление ВИЧ моделями* // Российский иммунологический журнал. 2013.Т. 7 (16). №. 2-3.
5. Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. *Оптимизация гарантии в задачах управления механическими системами* // Аграрный вестник Урала. 2012.№12 (104).С. 18-21.
6. Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. Некоторые задачи игрового управления. Екатеринбург: УрГСХА, 2012. С.128.
7. Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. *Об одной задаче отслеживания движений виртуальной динамической модели движениями реального динамического объекта* // Тез.докл. 14-ой Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых УГТУ – УПИ. Екатеринбург. 2008.

8. Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. *Об отслеживании движения виртуальной модели движением реального движущегося объекта* // Тез.докл. 15-ой Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых УГТУ – УПИ. Екатеринбург.2009.
9. Красовский А.Н., Ладейщиков А.Н. *Об одной задаче отслеживания движений динамического материального объекта и его виртуальной модели* // Тез.докл. 4-ой научно-практической конференции молодых ученых "Информационно-математические технологии и экономическое моделирование". Екатеринбург. 2010.
10. Ладейщиков А.Н. *Задача игрового управления при дефиците информации* // Тез.докл. 19-ой Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012». Москва. 2012.
11. Ладейщиков А.Н. *Некоторые задачи оптимального игрового управления*// Тез.докл. 5-ой Всероссийской научно-технической конференции «Безопасность критичных инфраструктур и территорий». Новоабзаково. 2012.
12. Ладейщиков А.Н. *Задача игрового управления при неполной запаздывающей информации* // Тез.докл. 20-ой Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013». Москва. 2013.